Generalized symmetry in QFTs and its Application

アウトライン

1. イントロ
2. Ward-Takahashi 恒等式 $\Rightarrow$ Generalized sym.
3. 応用 : Fradkin-Shenker の complementarity / YM @ $\theta = \pi$ / non-invertible sym

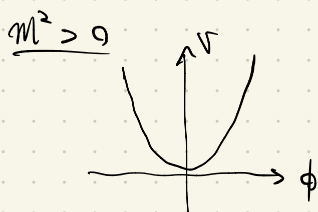
1. イントロ

power of symmetry : { スペクトルの縮退 / Phases of matter $\Leftarrow$ Landau criterion }

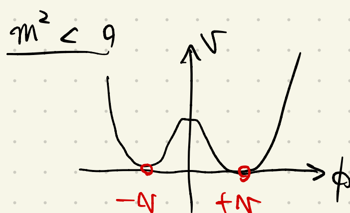
例

$$\mathcal{L} = (\partial\phi)^2 + m^2\phi^2 + \lambda\phi^4 \quad (\phi : \text{real scalar})$$

$m^2 > 0$



$m^2 < 0$



$\mathbb{Z}_2$-symmetry : $\phi \to -\phi$. $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ と不変になっている

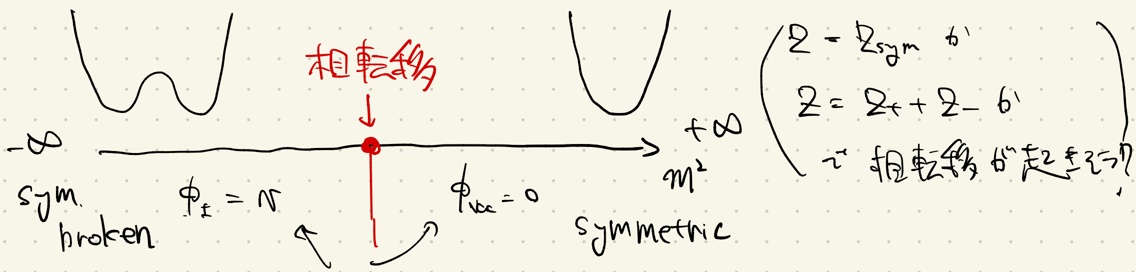
$m^2 > 0$ のとき : Vacuum で $\phi_{min} = 0 \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} -0 = 0$

よって vacuum で $\mathbb{Z}_2$-sym は保たれている

$m^2 < 0$ のとき : $\phi_\pm = \pm v$ と2つの min. が見つかる

$\to \phi_+ = +v \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} -v = \phi_-$ と それぞれの vac. は $\mathbb{Z}_2$ で破る

$\to$ "対称性の自発的破れ"



これらは別の相に分けられている?

Landau : $G \xrightarrow{SSB} H_{1,2}, \cdots,$ $H_1 \neq H_2$ のとき2つの相は別!

→ 教訓 : calculate locally, think globally !

[このための powerful tool が symmetry である!]

---

2. Generalized symmetry

- QFTにおける対称性

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-S[\phi]}$$

$S[\phi]$ が連続対称性をもつ ⇝ 古典論ではネーターの定理

⇝ 量子論ではWT恒等式

一般化された対称性 ⇝ 一般化されたWT恒等式 となる

- WT恒等式の導出

$\phi \to e^{i\epsilon}\phi$, $\epsilon = \epsilon^a T_a$ (const.) として

$S[\phi] = S[e^{i\epsilon}\phi]$ が成立していたとする?

(global symmetry)

ここで

$\epsilon \to \epsilon(x)$ と時空依存する量にすると

$$S[e^{i\epsilon(x)}\phi] = S[\phi] + \int_x \underset{\text{ネータカレント}}{j^\mu(x)}\partial_\mu \epsilon(x) + O(\epsilon^2)$$

となるはず

これを用いると

$$Z = \int \mathcal{D}\phi\, e^{-S[\phi]} \overset{\phi \to e^{i\epsilon}\phi}{=} \int \mathcal{D}\phi\, e^{-S[e^{i\epsilon}\phi]}$$

$$= \int \mathcal{D}\phi\, e^{-S[\phi]}\left(1 + \int j^\mu \partial_\mu \epsilon\right)$$ が得られる

これより $\langle \partial_\mu j^\mu(x) \rangle = 0$ と WT id. が得られる

より一般には次の WT id. が得られる：

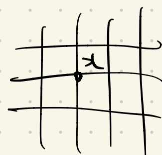
$$\langle \partial_\mu j^\mu(x) O_1(x_1) \cdots O_n(x_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \delta(x-x_i) \langle O_1(x_1) \cdots \delta O_i(x_i) \cdots O_n(x_n) \rangle$$

（ここで $\delta O_i(x)$ は $O_i(x)$ の無限小対称性変換）

以上の導出を見ると連続対称性にしか使えなさそうだが

これを一般化して（離散を含む）より一般の sym の WT id. を求めたい！

例. Ising 模型の $\mathbb{Z}_2$-sym の WT id.

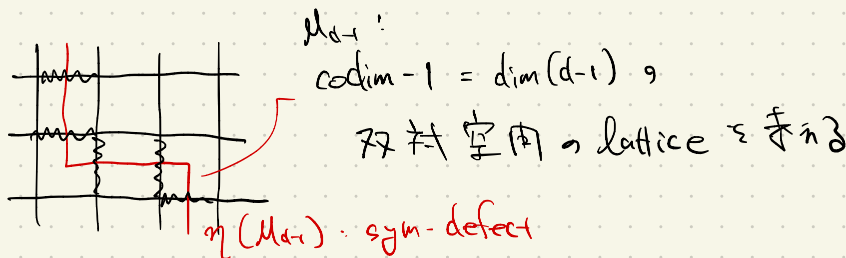


$$H[s] = J \sum_{\langle x, x' \rangle} s(x) s(x')$$

（$\langle x, x' \rangle$：nearest neighbor）　$s(x) = \pm 1$：古典スピン

$$Z = \sum_{\{s(x)\}} e^{-H[s(x)]}$$ を求める

いま "$\mathbb{Z}_2$-twist defect"



→ $H_{twist} = J \sum_{\langle x,x' \rangle \notin M_{d-1}} s(x)s(x') + (-J) \sum_{\langle x,x' \rangle \in M_{d-1}} s(x)s(x')$ とする

このとき
twisted partition function を

$$Z[\eta(M_{d-1})] = \sum_{\{s(x)\}} e^{H_{twist}}$$

と定義して

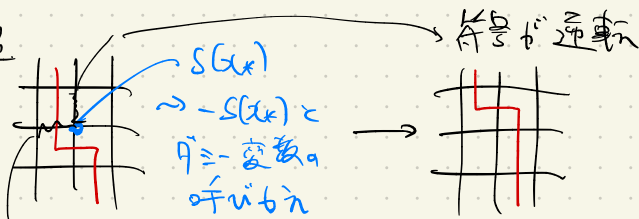
これが M_{d-1} のどんな連続変形でも変わらず

$$Z[\eta(M_{d-1})] = Z[\eta(M'_{d-1})] \quad \text{if} \quad M_{d-1} \overset{top.}{\simeq} M'_{d-1}$$

が成立する

(つまり Z(#) = Z(#) みたいになる!)

導出



となる

よってダミー変数の置き換えをしてるだけなので Z は同じ!

(ちなみに op. を insert したときも守たっているときだけ $\mathbb{Z}_2$ 変換をかける!)

→ 一般化された W.T. id. となっている!

連続対称性のときは

$$dS_\mu = \frac{1}{(d-1)!}\epsilon_{\mu\mu_1\cdots\mu_{d-1}} dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_d}$$ として

$$Q[M_{d-1}] = \int_{M_{d-1}} j^\mu dS_\mu$$ としてやると

WT id.

$\Leftrightarrow \langle Q[M_{d-1}] O_1(x_1)\cdots O_n(x_n)\rangle = \langle Q[M'_{d-1}] O'_1(x'_1)\cdots O'_n(x'_n)\rangle$

ここで $O'_i(x_i) = \begin{cases} \delta O_1(x_i), & x_i \in V_d \\ O_i(x_i) & x_i \notin V_{d-1} \end{cases}$

M'_{d-1}, V_d, M_{d-1}

と表してやると、上の Ising の場合との対応が見れる?

よって WT id. $\Leftrightarrow$ $\eta(M_{d-1})$: defect → "twisted b.c."

"ネーター charge"

こいつが topological.

すると、 つまり $\eta(M_{d-1}) = \eta(M'_{d-1})$ と理解できる?

Generalized symmetry := WT id.

:= "topological defect のデータ"

いつもの対称性 : G と表される?

① $\eta_g(M_{d-1})$: topological defect ← ネーターcharg
$g \in G$ codim-1
保存則

② $\eta_{g_1}(M_{d-1})\eta_{g_2}(M_{d-1}) = \eta_{g_1 g_2}(M_{d-1}) \Leftrightarrow$ ↑↑ $=$ ↑ ← group の結合則
$g_1\ g_2 \quad g_1 g_2$

③ (O_1 を囲む g) $= \times g\, O_1$ ← 群の rep.

と見る

top. だというのは大事だけで それ以外は本質的ではない？

$$\begin{cases} \text{codim-1} \longrightarrow \text{codim-}p+1 : \text{higher form sym.} \\ \text{群のかけ算} \longrightarrow \text{群の表現} : \text{non-invertible sym.} \end{cases}$$

となる

- <u>1-form sym. in pure $SU(N)$ YM theory</u>

Wilson の lattice formulation

$$U(x, \hat{\mu}) \text{``=''} e^{iA_\mu(x)} \in SU(N) : \text{link 変数}$$

plaquette : $U_p = P \prod_{(x,\mu)\in p} U(x, \hat{\mu}) = U_4 U_3 U_2 U_1$

ここで

$\mathrm{tr}(U_p)$ はゲージ不変で 大体 $F_{\mu\nu}^2$ を与える

$$\to S[U] = -\beta \sum_p \left[\mathrm{tr}(U_p) + c.c.\right] \text{ について}$$

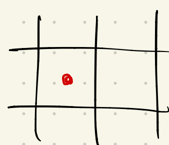
$$Z = \int \mathcal{D}U\, e^{-S[U]} \quad \text{を考える.}$$

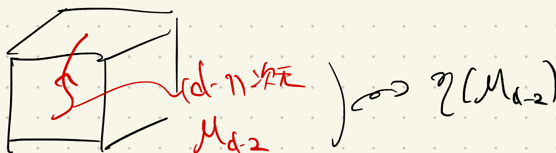
($\mathcal{D}U$: Haar 測度)

この理論は $\mathbb{Z}_N$ 1-form sym. を持っている？ ($p=1$ のとき)

つまり $SU(N)$ YM は $\mathbb{Z}_N$ codim-2 top. defect を持つ？

これを見るために, まず





としよう

このとき，

$$S_{twist}[U, \eta_k(M_{d-2})] = \beta \sum_{p \notin M_{d-2}} [\mathrm{tr}(U_p) + \mathrm{tr}(U_p^\dagger)]$$
$$- \beta \sum_{p \in M_{d-2}} \left(e^{\frac{2\pi i k}{N}} \mathrm{tr}(U_p) + e^{-\frac{2\pi i k}{N}} \mathrm{tr}(U_p^\dagger) \right)$$

（ここで k は $k \sim k+N$ となっている） として

$$Z_{twist}[\eta_k(M_{d-2})] = \int \mathcal{D}U \, e^{-S_{twist}[U, \eta_k(M_{d-2})]}$$ と定義する

このとき

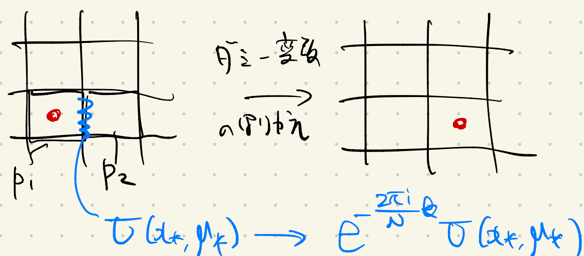
[主張：$Z_{twist}[\eta_k(M_{d-2})] = Z_{twist}[\eta_k(M'_{d-2})]$ if $M_{d-2} \overset{top.}{\simeq} M'_{d-2}$] が成立

（ここで $U \in SU(N) \Leftrightarrow U^\dagger U = \mathbb{1}$，$\det U = 1$ について

$U \to e^{i\alpha} U$ とすると $\det U = e^{iN\alpha} \det U = 1$ より $\alpha = \frac{2\pi i}{N}$

$\rightsquigarrow \mathbb{Z}_N : U \to e^{\frac{2\pi i}{N}} U$，$\mathbb{Z}_N \subset SU(N)$ となり

$= e^{\frac{2\pi i}{N}} I_{N\times N}$ を $SU(N)$ のセンター と呼ぶ）



$$\begin{cases} -\beta e^{\frac{2\pi i k}{N}} \mathrm{tr}\, U_{p_1} = \mathrm{tr}[U(x^*, \mu^*) U_{staple}] \longrightarrow -\beta \,\mathrm{tr}(U_{p_1}) \\ -\beta \,\mathrm{tr}(U_{p_2}) \longrightarrow -\beta e^{+\frac{2\pi i k}{N}} \mathrm{tr}(U_{p_2}) \end{cases}$$

となるので，defect が動いたけど Z は同じになっている?!

では、分配関数は不変になっているが、

何に作用するのかと言うと Wilson loop になっている!

Wilson loop : $W_R(C) = \mathrm{tr}\left(P\, e^{i\int A}\right)$

$$= \mathrm{tr}_R\left(P \prod_{(x,\mu)\in C} U(x,\mu)\right)$$

$$\left\langle W(C)\ \eta_k(M_{d-2}) \right\rangle = \left\langle W_R(C)\ \eta_k(M'_{d-2}) \right\rangle e^{\frac{2\pi i}{N} k|R|}$$

$|R|$: ヤング図の箱の数 mod N = N-ality of rep. R

(よって defect は試験粒子の N-ality charge を測っている!)

- 物理的な理解

gluon ← (ヤング図) ~ $\square^*$ ⊗ $\square$ = Adj

R ●(gluon)● $\bar{R}$ = $V_R(|x-b|)$ R に Adj をくっつけた分は区別することはできない!

が、mod-N 分は区別できる! と主張している

→ 実際に、$\eta_k(M_{d-2})$ を使ってこれを区別できている!

↑ これが center sym の generator になっている!

- Wilson の confinement criterion

W(C) : "order parameter"

ゲージ理論の gapped phases = { Higgs 相 ⟺ $W(C) \sim e^{-\#\mathrm{Length}(C)}$ (perimeter law) ; とじこめ相 ⟺ $W(C) \sim e^{-\sigma \mathrm{Area}(C)}$ (area law) }

これらが対称性に関連しているのかは
1970年代ごろには明確ではなかった？

が、これが一般化された対称性の言葉で理解できるとわかり

実際に $W(C)$ が $\mathbb{Z}_N$ 1-form sym. の秩序変数 とわかった

つまり
Higgs相：$\mathbb{Z}_N$ 1-form sym. が SSB
とじこめ相：〃 が unbroken
と理解できる。

cf.
$$\langle \phi(x) \rangle \begin{cases} \neq 0 & \text{broken} \\ = 0 & \text{unbroken} \end{cases}$$
等価 ⇕
$$\langle \phi(x)\phi(0) \rangle \xrightarrow{|x|\to\infty} \begin{cases} v^2 & \text{broken} \\ e^{-x/\xi} & \text{unbroken} \end{cases}$$
(broken ← ODLRO とも呼ばれる)

として見ると、∘$\xleftrightarrow[x]{}$∘ として落ちるか落ちないかと理解できる

→ (A, Area) として Area law は相関が落ちてるが
Perimeter law は 〃 落ちない
と見れる！

---

3. 応用

- Fradkin-Shenkar complimentarity

↑ 4次元 $U(1)$ lattice ゲージ-Higgs モデル

モノポールがあってきてるので とじこめ/Higgs がありうる！

作用：$S = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Higgs の VEV}}}{\kappa} \sum_{x,\mu} \cos(\partial_\mu \phi + q a_\mu) + \underset{\sim \frac{1}{g^2}}{\beta} \sum_{p} \cos(F_p)$

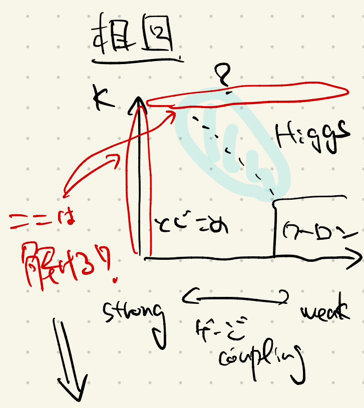
F_p：$\partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$ の格子版

$e^{i a_\mu(x)} \in U(1)$

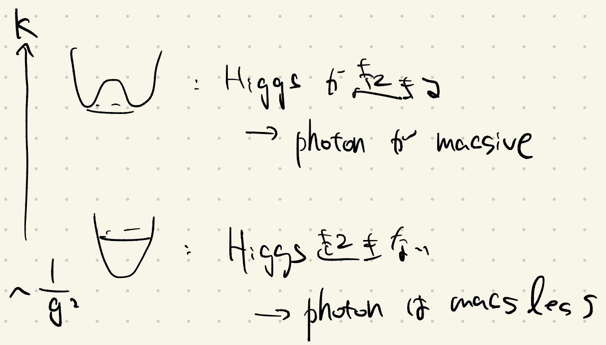
$\phi(x) \sim \phi(x) + 2\pi$

（$\Phi(x) = \sqrt{\kappa}\, e^{i\phi(x)}$ と化なぎい）

相図



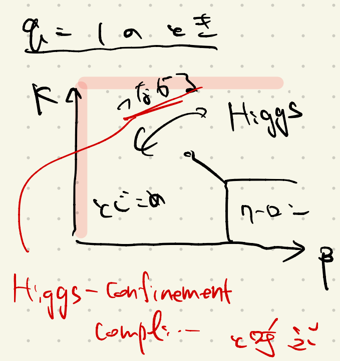
$\beta \sim \frac{1}{g^2}$



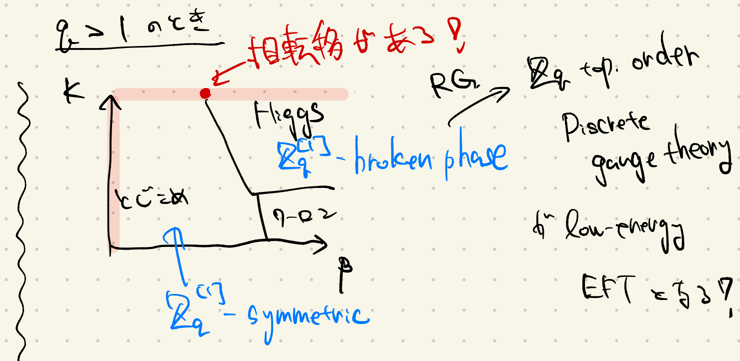
：Higgs が起きる
→ photon が massive

：Higgs 起きない
→ photon は massless

$q = 1$ のとき



$q > 1$ のとき



対称性の言葉では　$\mathbb{Z}_q$ 1-form sym. を持つことが効く

$\mathbb{Z}_q = \{1\}$ なので
対称性がない!

$\mathbb{Z}_q$-1-form sym がある!

Higgs と とじこめ は $\mathbb{Z}_q$ の broken / unbroken と理解できる!

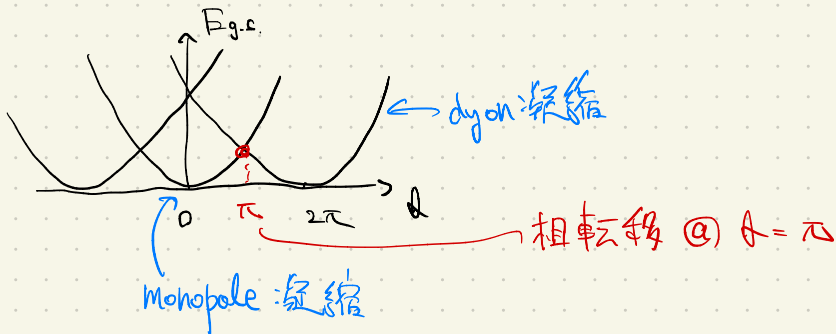
⑪ 4d YM @ $\theta = \pi$

$$S = \frac{1}{g^2}\int \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\theta \int \mathrm{tr}\,(F\tilde{F})$$

全微分

= instanton数 $\in \mathbb{Z}$ より $\theta \sim \theta + 2\pi$

この θ を入れると



となるよう

上の $\theta = 0$ と 2π では

どちらも gapped で対称性的には区別できなさそうだが

$\mathbb{Z}_N^{[1]}$-sym. に関する

Symmetry-Protected-Topological Phases (SPT相) として

区別されるものだと理解できるとわかった!